



LUMINY
UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE, Aix-Marseille II
MASTER 1 PSM

**Etude des transferts d'énergie dans les coques
sphériques minces, application aux
instruments de percussion de type cymbale**



ENSTA
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE TECHNIQUES AVANCEES
Unité de Mécanique

Mallaroni Bastien

tuteur de stage :

Cyril Touzé

Année universitaire 2004-2005

“Il a porté son regard dans les abîmes du chaos, il a discerné quelques-unes des formes tapies au fond ; mais les abîmes étaient encore trop obscurs et il a pris pour des monstruosité quelques-uns des plus beaux phénomènes mathématiques. Poincaré avait les profondeurs à sa portée, mais il manquait des moyens d’éclairage. Il fallu attendre une autre époque, équipée de la théorie qualitative des équations différentielles de Poincaré lui-même, ainsi que des ordinateurs et d’autres outils technologiques, pour apporter un peu de lumière dans les profondeurs chaotiques et révéler cette beauté.

Comme Robinson Crusoé, observant cinq orteils soigneusement imprimés dans le sable, il savait l’importance de ce qu’il avait vu. Comme Robinson Crusoé, il était rien moins qu’enthousiaste devant ce que cela laissait présager.”

Ian Stewart, “Dieu joue-t-il aux dés ?” [15]

Table des matières

1	Formulation du problème	4
1.1	Equations locales	4
1.2	Adimensionnement	5
1.3	Projection modale	5
2	Présentation du logiciel AUTO 2000	7
2.1	Méthode d'analyse numérique	7
2.2	Ecriture d'un programme avec AUTO 2000	9
3	Réduction à un mode axisymétrique	12
3.1	Introduction	12
3.2	Calcul perturbatif de la solution	12
3.3	Confrontation de la continuation numérique avec la méthode d'analyse . . .	15
	Variation du forçage Q	15
	Variation du coefficient cubique α	15
3.4	Comparaison avec l'expérience	17
4	Couplage entre plusieurs modes	19
4.1	Introduction	19
4.2	Comparaison des résultats	20
	Bibliographie	23

Introduction

Lorsqu'une structure mince est soumise à une excitation de niveau élevé, on peut observer de grands déplacements et des phénomènes typiquement non-linéaires apparaissent. Un modèle linéaire se révèle alors insuffisant. Cela est caractéristique des structures minces telles que les instruments de percussion non-linéaires (famille regroupant les cymbales et les gongs), où la faible dimension transverse a pour conséquence une faible rigidité dans cette direction. Dans ce cas, des efforts modérés entraînent de grands déplacements pour lesquels les non-linéarités (qui sont d'origine géométrique dans cette étude) ne peuvent être négligées. Des phénomènes de couplage entre modes peuvent apparaître. En effet, lorsque l'instrument est excité par un coup de baguette, le support spectral que l'on envoie dans la structure a une bande large (typiquement, on peut considérer qu'un coup de baguette envoie de l'énergie à toutes les fréquences comprises entre 0 et 1500 Hz). Ainsi, le nombre de modes qui se trouvent excités simultanément est très grand, ce qui rend d'emblée les vibrations difficiles à analyser.

Les études menées à l'UME sur les coques sphériques minces ont mis en évidence expérimentalement un transfert d'énergie entre un mode axisymétrique de fréquence ω_1 et deux modes asymétriques de fréquence $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$ (résonance 1 :1 :2). Une première étude analytique (à l'aide de la méthode des échelles multiples) avait permis de calculer les branches de solutions couplées en négligeant les termes de non-linéarité cubique dans les équations de vibration. Or les mesures expérimentales ont montré un léger désaccord avec les prédictions théoriques à partir d'un certain forçage. L'objectif de ce stage est donc de résoudre numériquement, à l'aide du logiciel AUTO 2000, les équations de vibrations avec les non-linéarités cubiques, afin de s'affranchir des limitations intrinsèques (en terme d'amplitude) de la méthode des échelles multiples.

La formulation générale du problème est exposée dans le premier chapitre. On y résume les principaux résultats obtenus dans la littérature concernant la mise en place de ce type de problème.

Dans le deuxième chapitre le logiciel AUTO 2000 est présenté. On y décrit la théorie mathématique qu'il utilise et comment se fait l'écriture des différents programmes informatiques.

Dans une troisième partie on considère le cas d'une plaque où un seul mode axisymétrique est excité. La solution calculée à l'aide de la méthode des échelles multiples est détaillée puis comparée aux résultats numériques et expérimentaux.

Puis dans un quatrième chapitre on étudie une résonance interne, pour le cas d'une coque, entre un mode axisymétrique et deux modes asymétriques compagnons. En effet, lorsque l'on excite la structure par une force sinusoïdale non loin de la résonance du mode axisymétrique, au delà d'une certaine amplitude, on observe les contributions des déformées modales des deux modes asymétriques. On est donc dans une situation de couplage. Les résultats expérimentaux sont mis en parallèle avec ceux obtenus par AUTO 2000.

Chapitre 1

Formulation du problème

Ce chapitre résume les principaux résultats obtenus dans [2].

1.1 Equations locales

On considère une calotte sphérique en laiton, faiblement courbée, homogène et isotrope. Les équations du mouvement, données dans [2], sont les suivantes :

$$D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\Delta F + \rho h\ddot{w} = L(w, F) - c\dot{w} + p(\vec{r}, t) \quad (1.1a)$$

$$\Delta\Delta F - \frac{Eh}{R}\Delta w = -\frac{Eh}{2}L(w, w) \quad (1.1b)$$

Soit F la fonction d'Airy (appelée aussi fonction de force, correspondant au chargement du plan moyen), w le déplacement transverse, p désigne la force extérieure exercée sur la coque, D est le terme de rigidité en flexion. On note E le module d'Young, c le coefficient d'amortissement et ρ la densité. De plus, on utilise ici ν le coefficient de Poisson, R le rayon de courbure et h l'épaisseur (voir figure 1.1)

avec :

$$\Delta_\diamond = \frac{\partial^2_\diamond}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial_\diamond}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2_\diamond}{\partial \theta^2} \quad (1.2)$$

L'expression de l'opérateur bilinéaire L est donnée par :

$$L(w, F) = w_{,rr} \left(\frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left(\frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left(\frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left(\frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right) \quad (1.3)$$

Les conditions aux limites de F et w , correspondant ici à la condition "bord libre" sont données par :

$$\forall t \quad \forall \theta \quad_{[0, 2\pi]} \quad F \text{ et } w \text{ sont bornées en } r = 0 \quad (1.4a)$$

$$F_{,r} + \frac{1}{a}F_{,\theta\theta} = 0 \quad (1.4b)$$

$$F_{,r\theta} + \frac{1}{a}F_{,\theta} = 0, \quad \text{en } r = a \quad (1.4c)$$

$$w_{,rr} + \frac{\nu}{a}w_{,r} + \frac{\nu}{a^2}w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{at } r = a \quad (1.4d)$$

$$w_{,rrr} + \frac{1}{a}w_{,rr} - \frac{1}{a^2}w_{,r} + \frac{2-\nu}{a^2}w_{,r\theta\theta} - \frac{3-\nu}{a^3}w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{at } r = a \quad (1.4e)$$

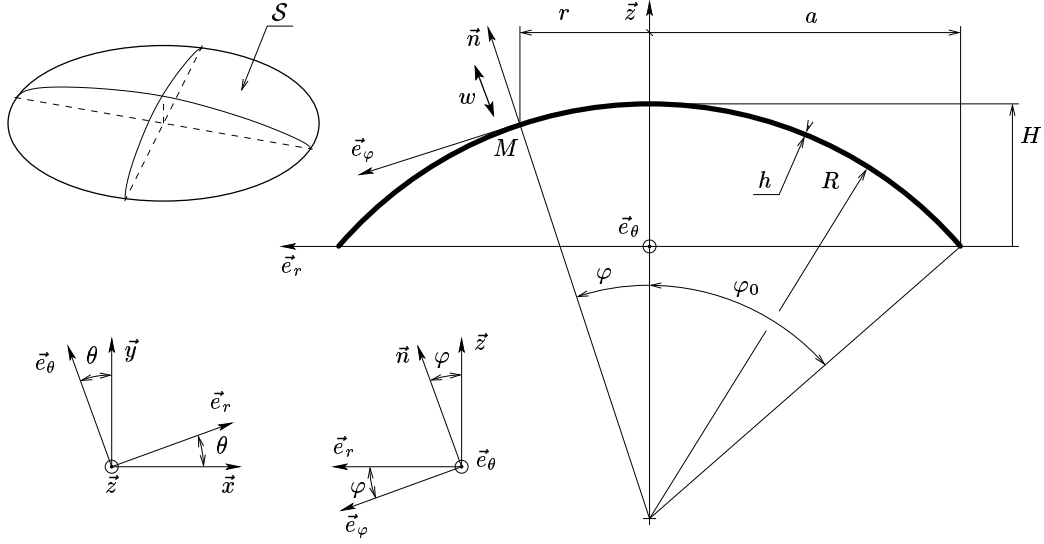


FIG. 1.1 – Schéma de la coque sphérique, d'après [2].

1.2 Adimensionnement

Plusieurs variables sans dimension sont introduites :

$$r = a\bar{r}, \quad t = a^2 \sqrt{\rho h / D} \bar{t}, \quad w = h\bar{w}, \quad F = Eh^3 \bar{F}$$

En introduisant ces variables adimensionnées dans (1.1), on obtient :

$$\Delta \Delta w + \varepsilon_q \Delta F + \ddot{w} = \varepsilon_c L(w, F) \quad (1.5a)$$

$$\Delta \Delta F - \frac{a^4}{R^2 h^2} \Delta w = -\frac{1}{2} L(w, w) \quad (1.5b)$$

où $\varepsilon_q = 12(1 - \nu^2) \frac{a^2}{Rh}$ et $\varepsilon_c = 12(1 - \nu^2)$

leurs indices viennent du fait que ces paramètres sont rattachés aux termes quadratiques et cubiques de la dynamique du système (cf équation (1.7)).

On retrouve les calculs dans [10] pour un adimensionnement quelconque.

Remarque : on choisit cette notation pour alléger le texte, mais on n'oubliera pas que les équations (1.5a) et (1.5b) sont des équations adimensionnées.

1.3 Projection modale

On appelle $\Phi_{(k,n)}$ les modes propres des mouvements transverses du problème linéaire associé, où k est le nombre de diamètres nodaux et n le nombre de cercles nodaux. Les modes axisymétriques n'ont que des cercles nodaux. Ils sont notés $(0, n)$ si ils ont n cercles nodaux. Les modes n'ayant que des diamètres nodaux, sont dits asymétriques purs et sont notés $(k, 0)$ avec k diamètres nodaux ; ils existent par paires du fait que les valeurs propres associées sont de multiplicité 2, ils ont alors les mêmes fréquences propres théoriques et leurs déformées modales se déduisent l'une de l'autre par rotation de $\pi/2k$ autour de l'axe de la coque (c'est une conséquence de la symétrie de révolution de la structure). Il existe aussi des modes mixtes notés (k, n) qui possèdent k diamètres nodaux et n cercles nodaux (cf figure 1.2).

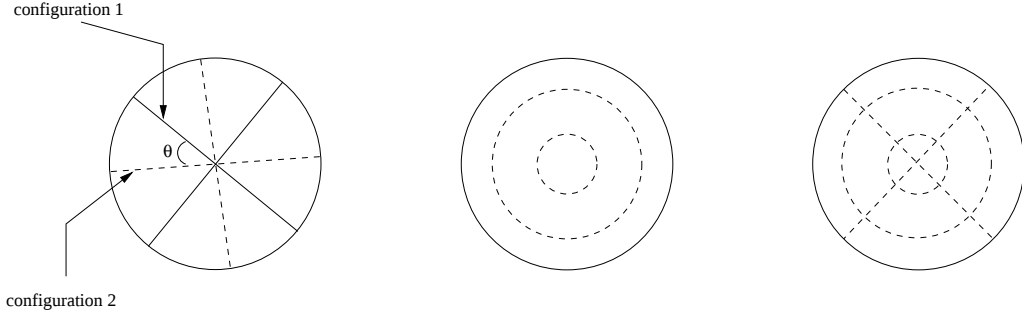


FIG. 1.2 – Représentation des configurations préférentielles d'un mode asymétrique (2,0), d'un mode axisymétrique (0,2) et d'un mode mixte (2,2).

On projette ensuite les équations du système (1.5) sur la base des modes propres transverses, ce qui conduit à chercher w sous la forme :

$$w(r, \theta; t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p(r, \theta) X_p(t) \quad (1.6)$$

où $\Phi_p(r, \theta)$ sont les modes propres et $X_p(t)$ des fonctions temporelles dont la dynamique est donnée par :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p = \varepsilon_q \left[- \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_{ij}^p X_i X_j - 2\mu_p \dot{X}_p + F_p(t) \right] - \varepsilon_c \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma_{ijk}^p X_i X_j X_k \quad (1.7)$$

avec : μ_p l'amortissement modal du p^{eme} mode et $F_p(t)$ la contribution de la force extérieure au p^{eme} mode.

On note :

$$F_p(t) = \int_S p(r, t) \Phi_p(r) dS \quad (1.8)$$

Le problème initial décrit par les équations (1.5a) et (1.5b) est alors remplacé par un problème équivalent donné par (1.7) qui correspond à un nombre infini d'oscillateurs non-linéaires couplés. Nous allons étudier dans les chapitres suivants quelles sont les troncatures qui ont été faites pour résoudre ce système analytiquement et les résultats obtenus seront comparés aux valeurs numériques données par le logiciel AUTO 2000.

Chapitre 2

Présentation du logiciel AUTO 2000

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement la méthode de résolution numérique utilisée par le logiciel AUTO. Celui-ci trouve les solutions par continuation : à partir d'une solution connue (souvent la solution linéaire), on calcule des branches de solution en faisant varier un paramètre α (appelé paramètre de continuation) et en extrapolant la solution de proche en proche. AUTO a été développé par l'équipe d'E.Doedel. La présentation que nous en faisons s'inspire de [11] et de [3].

2.1 Méthode d'analyse numérique

Exposons brièvement la méthode de continuation utilisée par le logiciel AUTO pour un système dynamique F de la forme :

$$F(\mathbf{X}, \alpha) = \dot{\mathbf{X}} \quad (2.1)$$

où α est un paramètre de continuation et $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$.

Considérons le cas d'une méthode de continuation utilisant comme paramètre une longueur d'arc s , dans le but de trouver les solutions stables et instables de notre système.

On considère $\mathbf{X}$ et α comme des fonctions de s , tels que :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(s) \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha(s) \quad (2.2)$$

On a de plus :

$$F[\mathbf{X}(s), \alpha(s)] = 0 \quad (2.3)$$

En différenciant (2.3), on obtient :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \alpha)\mathbf{X}' + F_{\alpha}(\mathbf{X}, \alpha)\alpha' = 0 \quad (2.4)$$

où $\mathbf{X}' = \frac{d\mathbf{X}}{ds}$ et $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$

on a alors un système à n équations et à $n + 1$ inconnues $\mathbf{X}'$ et α' . Pour cela on rajoute une condition de normalisation :

$$\mathbf{X}'^T \mathbf{X}' + \alpha'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 + \alpha'^2 = 1 \quad (2.5)$$

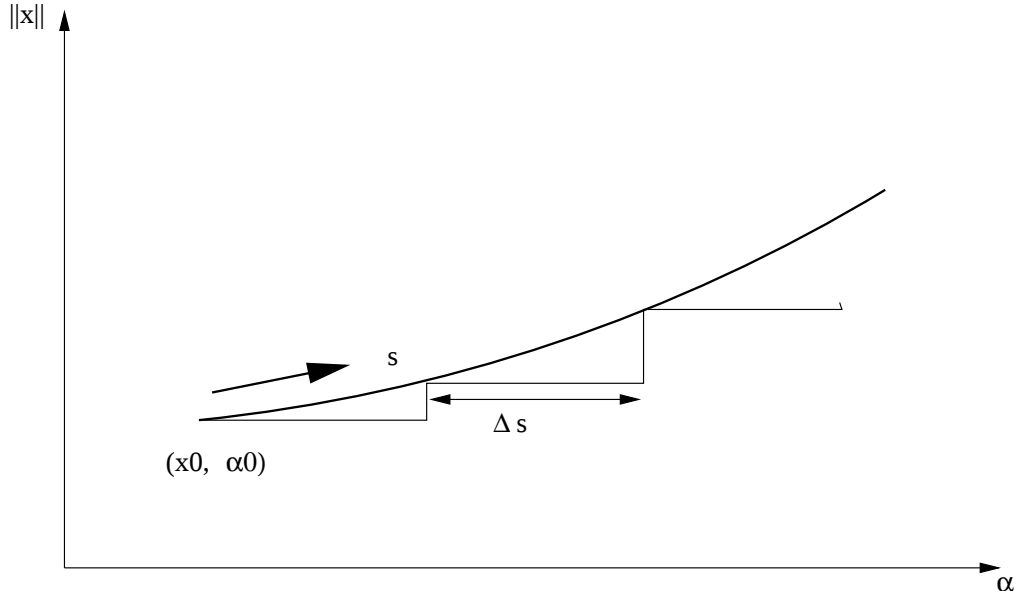


FIG. 2.1 – Illustration de la méthode de continuation par longueur d’arc (“arclength” en anglais)

Les conditions initiales qui nous servent de point de départ pour notre continuation sont pour (2.4) et (2.5) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \text{ et } \alpha = \alpha_0 \text{ en } s = 0$$

Pour prédire la valeur de $\mathbf{X}$ et α en $s + \Delta s$ on utilise :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}' \Delta s \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha' \Delta s.$$

Cette méthode de prédiction par les tangentes n’est plus applicable si on a un point tournant (voir figure 2.2). Le logiciel AUTO est très intéressant pour ces cas car il utilise une autre méthode, une continuation par pseudo longueurs d’arc, qui permet de suivre les branches de solution où la courbure s’inverse .

Sur la figure (2.2) on note s^* le point où la dérivée devient infini. De la même façon que précédemment, pour prédire la valeur de $\mathbf{X}_1$ et α_1 en $s^* + \Delta s$ on utilise la méthode de prédiction par les tangentes :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}^* + \mathbf{X}^{*'} \Delta s \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha^* + \alpha^{*'} \Delta s.$$

où le pas Δs peut être déterminé librement.

A ce stade si nous observons les solutions sur la verticale passant par $(\mathbf{X}_1, \alpha_1)$ comme dans la méthode précédente nous ne trouverons rien.

Le logiciel va alors chercher sur le vecteur

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X}_1 \\ \alpha - \alpha_1 \end{pmatrix}$$

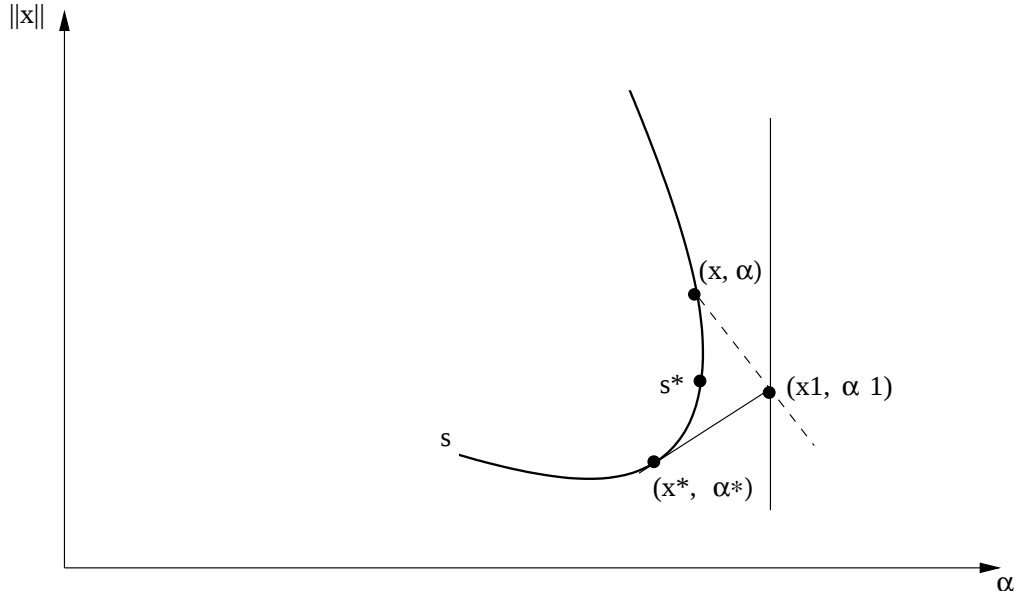


FIG. 2.2 – Illustration de la méthode de continuation par pseudo longueur d’arc (“pseudo-arclength” en anglais) utilisée par AUTO

normal au vecteur

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}^* \\ \alpha_1 - \alpha^* \end{pmatrix}$$

les points qui satisfont :

$$F(\mathbf{X}, \alpha) = 0 \quad (2.6)$$

2.2 Ecriture d’un programme avec AUTO 2000

AUTO est un logiciel très puissant pour résoudre des équations linéaires et non linéaires. Sa programmation se déroule en deux parties.

Premièrement on rentre les équations du système étudié en langage C. Un exemple où on a programmé les équations (3.10) est exposé ici.

```
int func (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp, const doublereal *par, integer ijac, doublereal *f, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp)
```

```
doublereal a, g, mu, k, w0, alpha, sigma;
```

```
a = u[0];
g = u[1];
```

```
mu = par[0];
k = par[1];
w0 = par[2];
alpha = par[3];
sigma = par[4];
```

```

f[0] = -mu*a + 0.5*k/w0*sin(g);
f[1] = sigma - 3*(alpha/w0)*a*a/8 + 0.5*k*cos(g)/(w0*a);

return 0;

int stpnt (integer ndim, doublereal t,
doublereal *u, doublereal *par)

/* Initialisation des paramètres */

par[0] = (doublereal)0.2; /*μ*/
par[1] = (doublereal)2; /*k*/
par[2] = (doublereal)2.; /*ω₀*/
par[3] = (doublereal)-10; /*α*/
par[4] = (doublereal)-10; /*σ*/

/* Initialisation de la solution */
u[0] = (doublereal)0.05; /*a*/
u[1] = (doublereal)0.02; /*γ*/

return 0;

```

Comme on peut le voir il suffit de donner une valeur de départ pour a et γ pour que le logiciel commence la continuation.

La deuxième partie de la programmation consiste en l'écriture des constantes. En effet, on doit rentrer un grand nombre de constantes telles que la précision, la dimension du système, le nombre de paramètres libres... Voici un exemple de fichier où l'on rentre les constantes :

2 1 0 1	NDIM,IPS,IRS,ILP
1 1	NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
50 4 3 2 1 0 0 0	NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
500 -30.0 30.0 0.0 100.0	NMX,RL0,RL1,A0,A1
100 10 2 8 5 3 0	NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-06 1e-06 0.0001	EPSL,EPSU,EPSS
0.01 0.001 0.05 1	DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0	NTHL,(/ ,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0	NTHU,(/ ,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0	

Le principe de fonctionnement de ce logiciel est très intéressant, en effet lors d'une première compilation on suit une seule branche sur laquelle on détecte des bifurcations dont les coordonnées sont sauvegardées. Ainsi, on peut repartir d'un de ces points lors d'une deuxième compilation, le point de départ est géré par la constante IRS. La constante NICP définit le nombre de paramètres libres (les paramètres qui varient lors de la continuation) et ICP correspond aux numéros de ces paramètres (ici ICP=1 ce qui veut dire que c'est

le forçage k que l'on incrémente), on peut aussi donner des limites au paramètre principal (celui qui apparait en premier dans la parenthèse de NICP) avec RL0 et RL1. Le nombre d'itérations maximales permises pour trouver une bifurcation est modifiable à l'aide de la constante ITMX. Les critères de précision sont gérés par EPSL, EPSU et EPSS. La constante DS définit la distance entre deux solutions (cette distance varie entre DSMIN et DSMAX). Une explication détaillée de toutes les constantes et du fonctionnement de ce logiciel peut être consultée en [12].

Chapitre 3

Réduction à un mode axisymétrique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la réponse de plaques circulaires minces à une excitation, tant que l'amplitude du forçage reste faible. On supposera qu'en régime stationnaire, un seul mode est excité. On se place dans un premier temps à la résonance primaire d'un mode axisymétrique. Ce cas ayant déjà été traité à plusieurs reprises dans la littérature ([1] ou [5]), il sera rapidement présenté ici.

On suppose donc que l'on excite un seul mode α de la forme $(0, n)$. La force d'excitation $F_p(t)$ apparaissant dans les équations (1.7), placée au centre de la plaque, vaut : $F_p(t) = Q \cos(\Omega t)$.

Dans le premier chapitre on a défini le coefficient des termes quadratiques $\varepsilon_q = 12(1-\nu^2)\frac{a^2}{Rh}$, or on étudie ici une plaque qui correspond au cas limite d'une coque où le rayon de courbure $R \rightarrow +\infty$, on a donc pas de termes quadratiques dans notre équation de mouvement qui pour un seul mode s'écrit :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \varepsilon[\alpha q^3 - 2\mu \dot{q} + Q \cos(\Omega t)] \quad (3.1)$$

Dans ce chapitre on effectue tout d'abord un calcul perturbatif de la solution à l'aide de la méthode des échelles multiples dont on compare ensuite les solutions aux résultats obtenus à l'aide de la continuation numérique. Pour finir on confronte les courbes théoriques issues des deux calculs avec les valeurs expérimentales de [10].

3.2 Calcul perturbatif de la solution

L'équation du mouvement (3.1) est une classique équation de Duffing forcée. On utilise ici une méthode *perturbative* pour en déterminer une solution approchée. Ces techniques consistent à considérer que les termes non linéaires et l'amortissement ne sont que des petites perturbations de l'équation linéarisée correspondante, dont on connaît une solution analytique. On en retrouvera une description détaillée dans [1]. La subtilité réside en l'élimination des termes résonnants conduisant dans la solution à des termes séculaires, de sorte que l'on obtienne une solution uniformément valide en temps. Ceci se fait en définissant plusieurs échelles de temps :

$$T_j = \varepsilon^j t, \quad j \geq 0 \quad (3.2)$$

la solution est cherchée sous la forme d'un développement en puissances de ε :

$$q = q_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (3.3)$$

On mesure l'écart entre la fréquence d'excitation Ω et la pulsation propre par le paramètre de désaccord σ , défini par :

$$\Omega = \omega + \varepsilon \sigma \quad (3.4)$$

Les dérivées temporelles s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (3.5a)$$

$$\frac{d}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \quad (3.5b)$$

où $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$. Par substitution des équations (3.3), (3.4), (3.5) dans l'équation (3.1), et en identifiant les puissances de ε , on obtient le système suivant :

$$\text{ordre 0 : } D_0^2 q_0 + \omega^2 q_0 = 0 \quad (3.6a)$$

$$\text{ordre 1 : } D_0^2 q_1 + \omega^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 + \Gamma q_0^3 - 2\mu D_0 q_0 + Q \cos(\omega T_0 + \sigma T_1) \quad (3.6b)$$

La solution générale de (3.6a) s'écrit :

$$q_0 = A(T_1) \exp(j\omega T_0) + c.c \quad (3.7)$$

où A est une fonction complexe de T_1 à déterminer, et cc désigne le complexe conjugué du terme précédent. Par substitution de (3.7) dans (3.6b), on obtient :

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = & -2j[\omega_0(A' + \mu A) + 3\Gamma A^2 \bar{A}] \exp(j\omega_0 T_0) - \Gamma A^3 \exp(3j\omega_0 T_0) \\ & + \frac{1}{2} Q \exp[j(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)] + cc \end{aligned} \quad (3.8)$$

où $\bar{A}$ est le complexe conjugué de A , et $A' = D_1 A$. On remarque alors qu'un terme *résonnant* (c'est à dire un terme correspondant à un forçage à la fréquence de résonance ω_0 de l'oscillateur considéré) apparait dans l'équation (3.8), appelé *terme séculaire*, qui donne à cette solution une validité limitée dans le temps. On obtient une solution uniforme en temps en annulant le facteur du terme résonnant ce qui nous permet d'obtenir la *condition de solvabilité*, qui donne une relation sur le paramètre libre A :

$$2j\omega(A' + \mu A) - 3\Gamma A^2 \bar{A} = \frac{Q}{2} \exp(j\sigma T_1) \quad (3.9)$$

On note :

$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp(j\beta(T_1))$ où a et β sont des fonction réelles, ce qui permet de séparer la partie imaginaire et la partie réelle de (3.9) :

$$\begin{cases} a' &= -\mu a + \frac{Q}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \\ a\beta' &= \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^3 - \frac{Q}{2\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \end{cases} \quad (3.10)$$

On rend alors le système (3.10) homogène avec le changement de variable $\gamma = \sigma T_1 - \beta$. On s'intéresse de plus au régime permanent (on s'intéresse aux points fixes), c'est à dire lorsque $a' = \gamma' = 0$, ce qui s'écrit :

$$\mu a = \frac{Q}{2\omega_0} \sin(\gamma) \quad (3.11)$$

$$a\sigma - \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^3 = -\frac{Q}{2\omega_0} \cos(\gamma) \quad (3.12)$$

En élevant au carré ces équations et en les ajoutant, on obtient l'équation implicite suivante, donnant l'amplitude a de la solution en fonction du paramètre de désaccord σ :

$$a^2 \left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\Gamma}{8\omega_0} a^2 \right)^2 \right] = \frac{Q^2}{4\omega_0^2} \quad (3.13)$$

soit :

$$\sigma = \frac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2 \right)} \quad (3.14)$$

On effectue les mesures en régime permanent, ce qui consiste à étudier les solutions stables pour le système (3.12). Cela revient à étudier les valeurs propres de la matrice jacobienne, on pourra ainsi définir les zones de stabilité.

soit :

$$\dot{X} = F(X) \quad \text{avec} \quad X = (X_1 \dots X_N) \in \mathbb{R}^n$$

étudions un point fixe X_0 tel que $F(X_0) = 0$

on pose $X = X_0 + \xi$

et $\dot{\xi} = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{X_0} \cdot \xi + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right)_{X_0} \cdot \xi^2 + \dots$

on peut ainsi écrire la matrice jacobienne qui est de la forme :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial X_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial X_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial X_1} & \frac{\partial F_N}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial X_N} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont de la forme :

$$\lambda_j = \sigma_j \pm i\omega_j \quad (3.16)$$

avec σ_j le taux de croissance de la perturbation.

Les points sont stables si :

$$\forall j \quad \sigma_j < 0 \quad (3.17)$$

on a un point instable si :

$$\exists j_0 \text{ tel que } \sigma_{j_0} > 0 \quad (3.18)$$

De cette manière on définit les zones de stabilité de notre système et les différentes bifurcations qui y ont lieu (consulter [8] pour plus de détails).

3.3 Confrontation de la continuation numérique avec la méthode d'analyse

La plaque utilisée pour les expériences est en laiton, avec un diamètre $2a = 220$ mm, une épaisseur de $h = 1.6$ mm, une densité $\rho = 7974 \text{ kg/m}^3$, un module d'Young $E = 85.10^9 \text{ Pa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.38$. Cette plaque est ensuite suspendue par des fils de nylon et excitée par un système bobine/aimant avec une force sinusoïdale d'amplitude constante, pour des fréquences croissantes ou décroissantes. Durant mon stage, j'ai utilisé des résultats obtenus précédemment, je vous renvoie donc pour plus de détails sur les conditions expérimentales en [10] et [14].

Jusqu'à présent, les résultats expérimentaux étaient confrontés aux valeurs obtenues à l'aide de la méthode analytique des échelles multiples. Des différences sont alors observées entre les deux à partir d'un certain forçage (voir résultats de [10]), c'est pourquoi il est intéressant d'utiliser une méthode numérique de continuation prenant en compte les non-linéarités cubiques, pour voir si il est possible de prédire finement les résultats expérimentaux.

Dans un premier temps on va donc comparer les résultats numériques obtenus à l'aide d'AUTO 2000 et ceux trouvés analytiquement par la méthode perturbative en faisant varier les valeurs des différents paramètres.

Remarque : les valeurs des différents paramètres sont prises arbitrairement pour faire des comparaisons entre les différents calculs, elles sont ensuite recalculées pour coller avec des valeurs réelles.

Variation du forçage Q

Nous allons tout d'abord faire varier la valeur du forçage Q pour voir à partir de quelle valeur les deux courbes ne coïncide plus.

Il est important de remarquer ici que la différence entre les deux courbes commence à être significative à partir de $Q = 5$ (cf figure 3.1). On observe bien un écart qui croît avec le forçage, ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux de [10].

Variation du coefficient cubique α

Faisons maintenant une étude comparative lorsque le paramètre α varie afin d'observer si cela a une influence sur l'amplitude de la réponse en fréquence de la plaque. On choisit une valeur de forçage faible ($Q = 2$) pour que l'amplitude ne soit pas faussée dès le début.

Force est de constater que l'amplitude de la réponse est fortement influencée par le coefficient α du terme cubique (cf figure 3.2). En effet, l'amplitude est constante pour les courbes obtenues avec la méthode perturbative alors que les simulations avec AUTO nous montrent clairement que celle-ci décroît *linéairement* lorsque α augmente.

Ces résultats nous prouvent bien que la méthode perturbative des échelles multiples n'est plus applicable à partir de certaines valeurs. Essayons maintenant de voir si les calculs numériques sont en accord avec les mesures expérimentales.

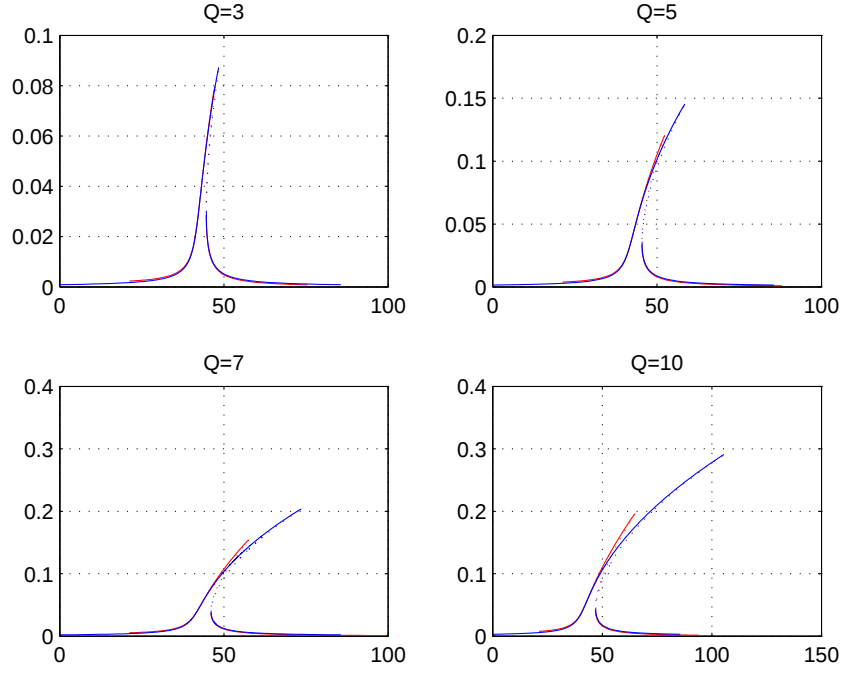


FIG. 3.1 – Influence du paramètre de forçage Q sur l'amplitude de la réponse fréquentielle. Les courbes en rouges sont celles données par AUTO. Les paramètres ont été fixés à $\omega=2$, $\alpha=1$, $\mu=0.2$ et $\varepsilon=0.1$. Les courbes en rouges sont celles données par AUTO. Les solutions stables sont représentées en trait plein et les solutions instables sont tracées en pointillés

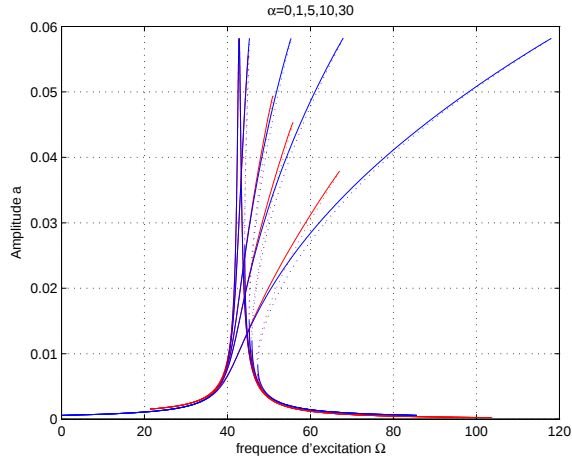


FIG. 3.2 – Courbe de réponse en fréquence pour α qui varie. Les paramètres ont été fixés à $\omega=2$, $Q=2$, $\mu=0.2$ et $\varepsilon=0.1$. Les courbes en rouges sont celles données par AUTO. Les solutions stables sont représentées en trait plein et les solutions instables sont tracées en pointillés

3.4 Comparaison avec l'expérience

Des comparaisons entre la méthode analytique et les résultats expérimentaux ont été faites dans de nombreuses publications ([10] ou [14]). Mais c'est la première fois que ces résultats sont confrontés à une solution numérique, ici calculée par AUTO 2000.

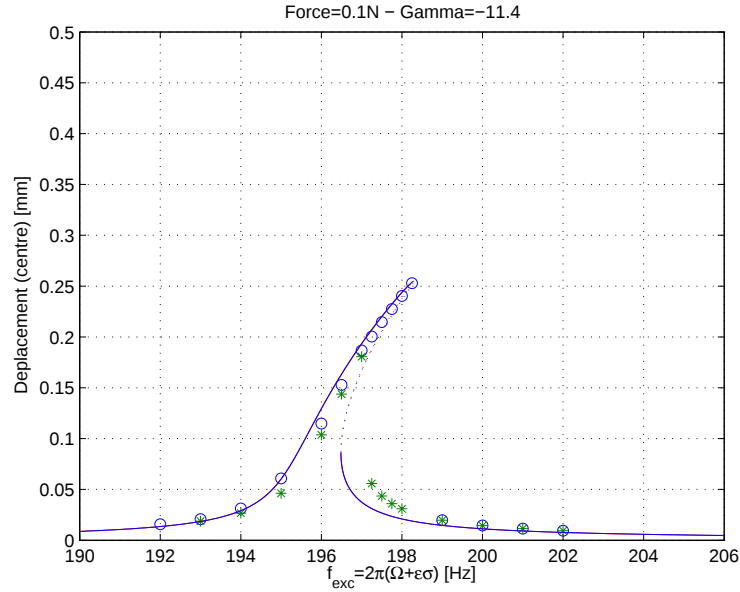


FIG. 3.3 – Comparaison entre les données expérimentales (les ronds “o” correspondent au balayage en fréquence réalisé en augmentant la fréquence de forçage, les étoiles “*” en la diminuant). La courbe théorique obtenue par la relation (3.14) est en bleue et celle obtenue avec AUTO est en rouge. Les valeurs expérimentales proviennent de [10].

Il est important de dire ici que les valeurs expérimentales obtenues ont été recalées pour coller avec les résultats analytiques. Cependant, au delà d'un certain forçage on s'aperçoit que les résultats expérimentaux sont plus proches de la courbe obtenue avec AUTO 2000 que de celle que nous donne la méthode perturbative. Les figures (3.3), (3.4) et (3.5) illustrent bien que l'écart entre les deux courbes va de pair avec le forçage.

La figure (3.5) montre que si des expériences avaient été réalisées avec un grand forçage, les valeurs auraient été très différentes de celles que donne la méthode perturbative.

Ce chapitre montre clairement les limites de la méthode des échelles multiples utilisée jusqu'à présent pour calculer les réponses en fréquence d'une plaque.

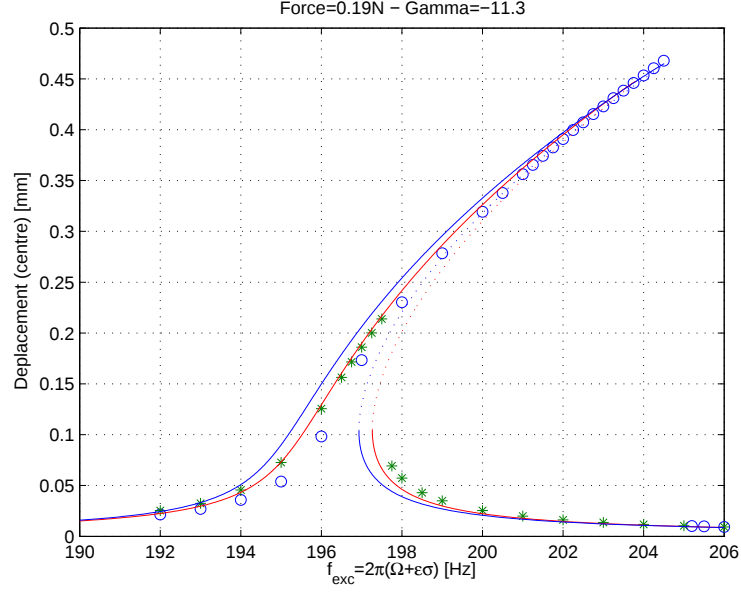


FIG. 3.4 – Comparaison entre les données expérimentales (les ronds “o” correspondent au balayage en fréquence réalisé en augmentant la fréquence de forçage, les étoiles “*” en la diminuant). La courbe théorique obtenue par la relation (3.14) est en bleue et celle obtenue avec AUTO est en rouge. Les valeurs expérimentales proviennent de [10].

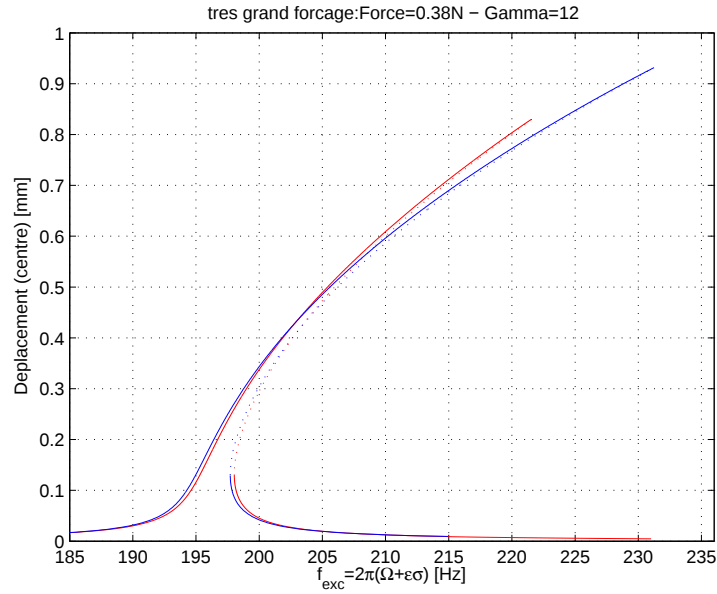


FIG. 3.5 – La courbe théorique obtenue par la relation (3.14) est en bleue et celle obtenue avec AUTO est en rouge.

Chapitre 4

Couplage entre plusieurs modes

4.1 Introduction

En prenant l'adimensionnement $w_0 = \frac{h^3}{a^2}$ (cf [2]), on obtient $\varepsilon_c \ll \varepsilon_q \ll 1$, de telle sorte qu'en première approximation on peut négliger les termes cubiques. Le système (1.7) s'écrit alors :

$$\ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = \varepsilon_q \left[- \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \beta_{pq}^s q_p(t) q_q(t) - 2\mu_s \dot{q}_s(t) + \tilde{Q}_s(t) \right] \quad (4.1)$$

Le régime permanent de la coque, qui est le cadre de cette étude, est gouverné par le premier mode axisymétrique (0,1), dont la fréquence de résonance est proche de la fréquence d'excitation, et par les modes excités indirectement par des échanges d'énergie internes. Les autres modes voient leur amplitude décroître en régime transitoire du fait de l'amortissement.

Une analyse modale expérimentale est effectuée dans [6], on y constate que la fréquence propre du mode (0,1) vaut environ le double de la fréquence de résonance des 2 modes asymétriques compagnons (6,0). L'expérience permet de vérifier que le couplage entre deux de ces trois modes est observé. Les contributions des autres modes sont considérées comme négligeables. On ne garde alors que les trois modes précités pour la suite de notre étude. De plus l'évolution temporelle de l'excitation est sinusoïdale et celle-ci s'exerce au centre de la coque ce qui entraîne que le terme $F_p(t)$ est théoriquement nul pour tous les modes asymétriques.

Le système (4.1) devient :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon_q [\alpha_1 q_1 q_3 - 2\mu_1 \dot{q}_1] \quad (4.2a)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon_q [\alpha_2 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2] \quad (4.2b)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \varepsilon_q [\alpha_3 q_1^2 + \alpha_4 q_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + Q \cos \Omega t] \quad (4.2c)$$

Avec q_1 et q_2 les fonctions temporelles associées aux deux modes asymétriques compagnons et q_3 la fonction temporelle associée au mode axisymétrique.

La fréquence d'excitation est choisie proche de ω_3 . On introduit les termes de désaccord σ_0 , σ_1 et σ_2 tels que :

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon_q \sigma_0 \quad (4.3a)$$

$$\omega_3 = 2\omega_1 + \varepsilon_q \sigma_1 \quad (4.3b)$$

$$\Omega = \omega_3 + \varepsilon_q \sigma_2 \quad (4.3c)$$

Pour résoudre le système (4.2), on a recours à la méthode des échelles multiples. La méthode est la même que pour le cas axisymétrique traité au chapitre 3. Je vous renvoie à [2] où les solutions sont calculées en détail.

Lorsque l'amplitude des vibrations transverses d'une structure mince atteint l'ordre de grandeur de son épaisseur, les effets induits par les non-linéarités ne peuvent plus être négligés, aussi bien dans l'étude de la déformée des structures que dans celle de leur dynamique. Si on ne conserve que les trois oscillateurs (correspondants aux modes impliqués dans la résonnance interne) avec les termes cubiques, des erreurs de troncatures sont possibles dues au fait que les sous-espaces propres linéaires ne sont pas invariants. Une solution consiste alors à conserver un grand nombre d'oscillateurs dans le système (1.7). Mais cela pose d'emblée des problèmes de calcul (temps de convergence...). Une façon beaucoup plus simple pour réduire la dynamique à trois oscillateurs est d'utiliser un changement de variables non-linéaires qui projette les équations de la dynamique dans des sous-espaces invariants que l'on appelle les modes non-linéaires. Cette technique a déjà été l'objet de plusieurs études approfondies ([7]).

Le système d'équations que l'on rentre dans AUTO s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = & \varepsilon_q [\alpha_1 q_1 q_3 - 2\mu_1 \dot{q}_1] + H_{111}^1 q_1^3 + \tilde{H}_{111}^1 q_1 \dot{q}_1^2 + H_{122}^1 q_1 \dot{q}_2^2 + H_{133}^1 q_1 \dot{q}_3^2 \\ & + \tilde{H}_{122}^1 q_1 \dot{q}_2^2 + \tilde{H}_{133}^1 q_1 \dot{q}_3^2 + H_{212}^1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + H_{313}^1 q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = & \varepsilon_q [\alpha_2 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2] + H_{222}^2 q_2^3 + \tilde{H}_{222}^2 q_2 \dot{q}_2^2 + H_{233}^2 q_2 \dot{q}_3^2 + \tilde{H}_{233}^2 q_2 \dot{q}_3^2 \\ & + H_{211}^2 q_2 \dot{q}_1^2 + \tilde{H}_{211}^2 q_2 \dot{q}_1^2 + H_{323}^2 q_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + H_{121}^2 q_1 \dot{q}_2 \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = & \varepsilon_q [\alpha_3 q_1^2 + \alpha_4 q_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + Q \cos \Omega t] + H_{333}^3 q_3^3 + \tilde{H}_{333}^3 q_3 \dot{q}_3^2 + H_{311}^3 q_3 \dot{q}_1^2 \\ & + H_{322}^3 q_3 \dot{q}_2^2 + \tilde{H}_{311}^3 q_3 \dot{q}_1^2 + \tilde{H}_{322}^3 q_3 \dot{q}_2^2 + H_{131}^3 q_1 \dot{q}_3 \dot{q}_1 + H_{232}^3 q_2 \dot{q}_3 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nous allons maintenant mettre en parallèle les différents résultats que nous donne ces méthodes afin de voir si les valeurs expérimentales peuvent être prédites finement.

4.2 Comparaison des résultats

Etudions dans un premier temps les résultats issus de la méthode perturbative exposés dans [10].

On observe aisément des désaccords notables entre les courbes théoriques et les mesures expérimentales (cf figure 4.1). On note principalement des amplitudes plus faibles pour les valeurs expérimentales du mode 1 et du couplage du mode 1 avec le mode 3 pour des fréquences inférieures à ω_3 et plus élevées lorsque la fréquence d'excitation est supérieure à ω_3 .

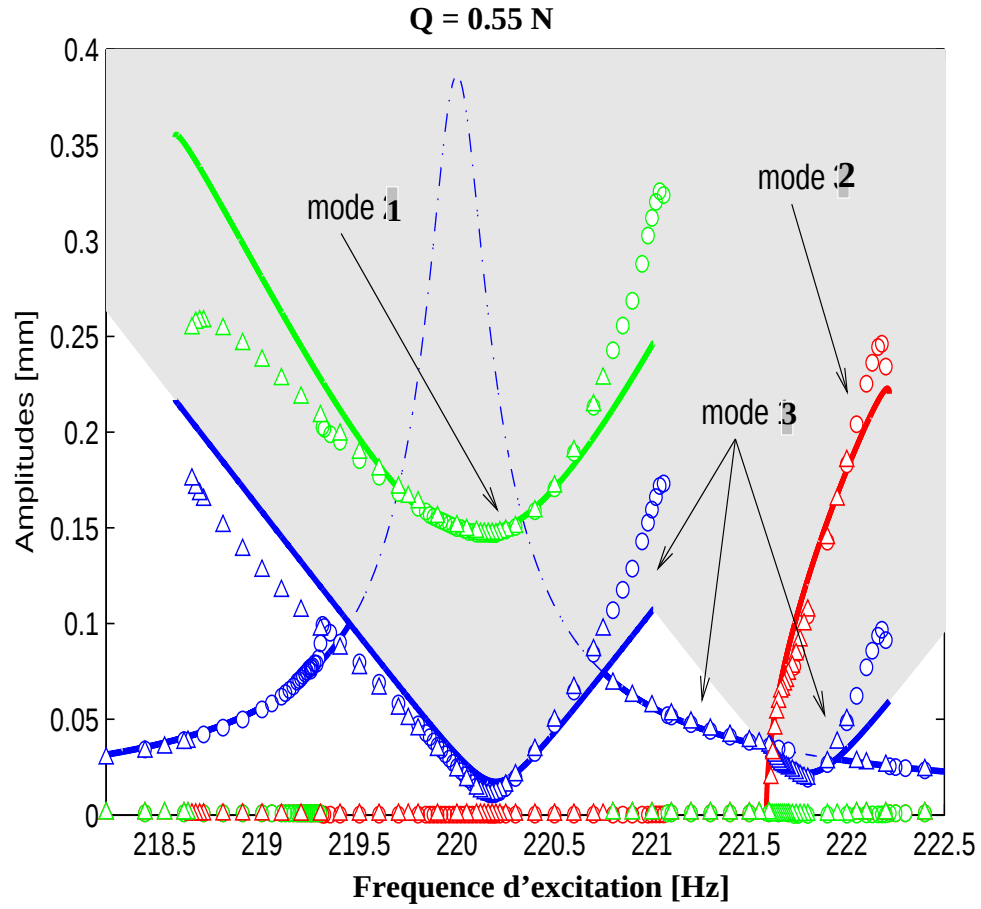


FIG. 4.1 – Comparaison des valeurs analytiques avec les valeurs expérimentales lors d'une résonance (1 :1 :2). Les ronds "o" correspondent au balayage en fréquence réalisé en augmentant la fréquence de forçage, les étoiles "*" en la diminuant. D'après [10]

Exposons maintenant une comparaison des valeurs obtenues avec AUTO (prenant en compte toutes les non-linéarités cubiques) et celles données par la méthode perturbative (négligeant les non-linéarités cubiques).

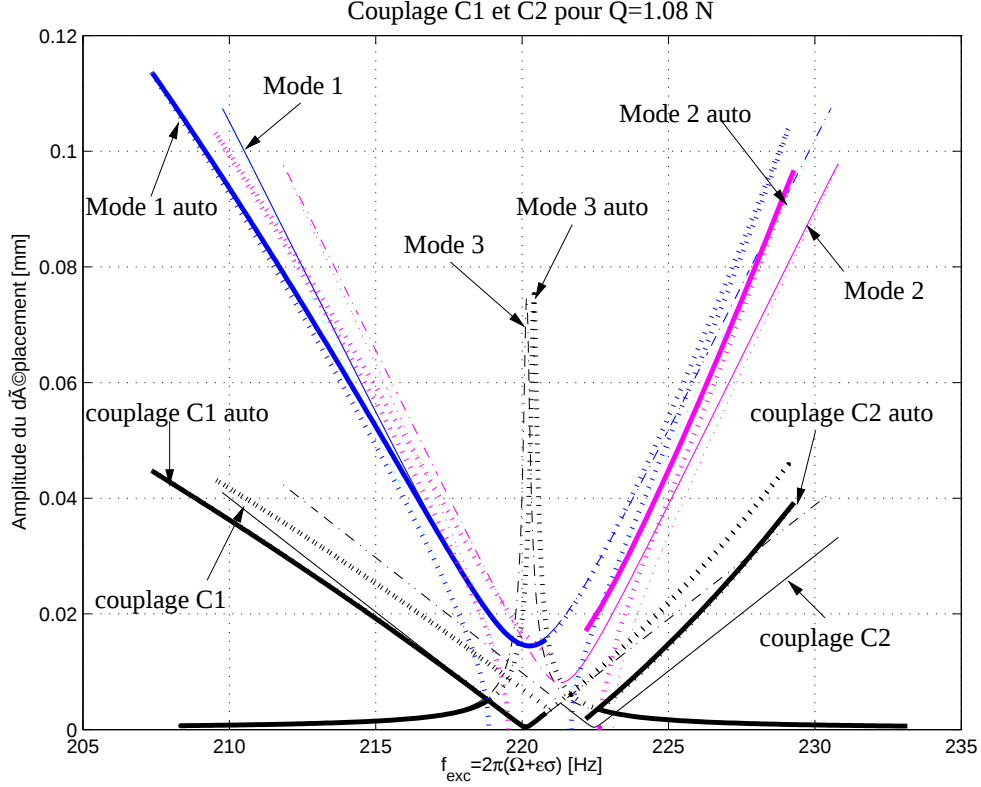


FIG. 4.2 – Comparaison des valeurs analytiques avec les solutions numériques pour un couplage (1 :1 :2)

Il est très intéressant de voir que sur la figure (4.2) on observe des écarts d'amplitude entre la solution numérique et analytique qui correspondent aux écarts commentés ci-dessus entre les valeurs expérimentales et analytiques de la figure (4.1). On a aussi vu apparaître une bifurcation de Hopf pour $f_{exc} = 221 Hz$ ce que la méthode perturbative ne pouvait prévoir mais qui a été observé expérimentalement. Une comparaison directe entre l'expérience et les données numériques n'a pu être faite car on ne connaît pas les valeurs réelles des coefficients des termes cubiques. Mais la figure (4.2) donnera certainement une prédiction précise des mesures expérimentales qui seront alors recalées sur les valeurs numériques (un recalage est nécessaire du fait des imperfections de la coque).

Conclusion

Force est de constater que les objectifs espérés ont été atteints. En effet, la résolution numérique réalisée par le logiciel AUTO 2000 a permis de dépasser les limites imposées (en terme d'amplitude) par la méthode des échelles multiples. Par corrélation, on a facilement pu s'apercevoir que les mesures expérimentales tendaient à se confondre avec les résultats numériques. Nous n'avons pu réaliser de nouvelles expériences par manque de temps, l'étude a donc été faite avec des valeurs expérimentales recalées sur la méthode perturbative, ce qui nous a empêché d'observer une osmose parfaite entre nos courbes. Un recalage avec les solutions numériques sera l'objet d'une prochaine étude.

Les modèles mathématiques utilisés permettent une bonne interprétation des vibrations issues des instruments de percussions non-linéaires ce qui est encourageant pour la synthèse sonore future.

Bibliographie

- [1] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *John Wiley and sons* (1979). Non-linear oscillations.
- [2] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne, *International journal of solids and structures* (2004) **42**, 3339-3373. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance.
- [3] A. H. Nayfeh and B. Balachandran, *John Wiley and sons* (1995). Applied Nonlinear Dynamics.
- [4] C. Touzé, *Thèse de doctorat de l'université Paris VI* (2000). Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques - Application aux instruments de percussion non-linéaires.
- [5] O. Thomas, *Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie* (2001). Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion non-linéaires.
- [6] O. Thomas, *Rapport de recherche ENSTA-UME* (2003). Vibrations non-linéaires de calottes sphériques minces - Expériences et modélisation.
- [7] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne, *Journal of Sound and Vibration* (2002) **273** (2004), No 1-2, 77-101. Hardening/Softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes.
- [8] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Ellipses* (2000). Bifurcations et chaos - Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran and Mathematica.
- [9] C. Touzé, O. Thomas, soumis au *International Journal of Non-linear Mechanics* (2004). Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry.
- [10] E. Luminais, *Mémoire de DEA* (2004). Etude expérimentale d'une résonance interne sous-harmonique dans une coque sphérique.
- [11] E. Doedel, *CRM* (2000). Lectures notes on numerical analysis of bifurcation problems.
- [12] E. Doedel, (2002). Auto 2000 : continuation and bifurcation software for ordinary differential equations.
- [13] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne, *Journal of Sound and Vibration* (2002) **258**, 649-676. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates - Part 1 : theory.
- [14] C. Touzé, O. Thomas and A. Chaigne, *Journal of Sound and Vibration* (2002) **265**, 1075-1101. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates - Part 2 : experiments.
- [15] I. Stewart, *Champs Flammarion* (1998). Dieu joue-t-il aux dés ? - Les mathématiques du chaos.

Remerciements

Ils sont tout d'abord adressés à Cyril Touzé qui m'a encadré tout au long de mon stage. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet qui m'a permis de voyager dans le monde non-linéaire dont j'ignorais presque tout, sa disponibilité et sa patience m'ont beaucoup aidé dans mon travail. Merci à Antoine Chaigne de m'avoir accueilli dans son équipe et à Jean Kergomard de m'avoir mis en contact avec Cyril. Je dois aussi remercier l'ensemble des membres et stagiaires du laboratoire pour leur bonne humeur et leur disponibilité. Je tiens aussi à saluer les gens qui m'ont proposé de jouer au foot sans qui j'aurais été obligé de monter la côte à pied tous les jours... Merci à tous les conducteurs et les "porteurs de plateaux" pour leur soutien.